



Institut canadien des dérivés
Canadian Derivatives Institute

L'Institut bénéficie du soutien financier de l'Autorité des marchés financiers ainsi que du ministère des Finances du Québec

Note technique

NT 14-03

Tarification de la “Timer Option” à Horizon Fini

Avril 2014

Cette note technique a été rédigée par

Mikael Roger-Tessier

Sous la direction de Martin Boyer, HEC Montréal

1 Introduction

En avril 2007, la Société Générale a introduit un nouveau produit dérivé exotique, les *timer options*. Contrairement aux options européennes, c'est l'acheteur de la protection qui spécifie un niveau de volatilité implicite. Le budget de variance est alors obtenu à partir de la volatilité implicite spécifiée par l'investisseur et par l'échéance de l'option souhaitée par ce dernier. Le budget de variance est l'élément clé de l'option. En effet, l'échéance d'un *timer option* est incertaine et dépend de la variance réalisée de l'actif sous-jacent au cours de la vie de l'option. Lorsque la variance réalisée atteint le budget de variance, l'option est automatiquement exercée. Par conséquent, si la variance réalisée est plus faible que le budget de variance sur l'horizon spécifié initialement par l'investisseur, la maturité réalisée de l'option sera plus élevée que celle préalablement souhaitée par l'acheteur de l'option, et vice versa.

Comme ce document se veut en ligne avec les différentes pratiques de marché, il est impératif de modifier la définition des *timer options*. D'un point de vue pratique, si la volatilité de l'actif sous-jacent est très faible, la durée de vie du *timer option* peut être extrêmement longue. C'est la raison pour laquelle, en pratique, on doit imposer une échéance maximale à l'option (date à laquelle, même si la volatilité réalisée est en dessous du budget de variance, l'option est exercée automatiquement). Cette caractéristique supplémentaire, comme nous allons l'explicitier plus loin, a des conséquences non négligeables sur la tarification ainsi que sur la gestion des risques de ce type d'option. Nous allons dorénavant référer à ce type d'option comme étant un *timer option* à échéance maximale ou un *timer option* à horizon fini. En contraste, lorsqu'un *timer option* n'a pas d'échéance maximale, il portera l'appellation de *timer option* perpétuel.

En plus de modifier la définition classique de l'option, nous allons nous attarder au cas où ce type d'option a comme actif sous-jacent un taux de change. Un taux de change, de par sa nature, est régi par des facteurs qui lui sont propres (notamment le différentiel de taux d'intérêt entre les pays composant la paire de devise).

La suite du document sera divisée comme suit : nous présenterons, dans la section suivante, une brève revue de littérature concernant les *timer options*. Par la suite, nous présenterons le modèle ainsi que la méthode de tarification retenue afin de valoriser un *timer option* à horizon fini sur devise. Les sections suivantes présenteront l'implantation pratique de notre modèle. Nous traiterons de la calibration du modèle et nous présenterons les résultats numériques de notre implantation (paramètres calibrés et exemple de tarification). Par la suite, nous présenterons une analyse de sensibilité du prix de l'option en fonction de certains paramètres clés liés l'option. La section suivante présentera une analyse de sensibilité des paramètres grecs de l'option. Finalement, à la lumière des différents résultats obtenus, nous présenterons une conclusion.

2 Revue de Littérature

Les *timer options* ont été étudiés dans la littérature sous le nom de *mileage options* dans les années 1990 par Neuberger (1990) et Bick (1995). À ce moment, ce type d'option n'était pas transigé. Depuis la mise en marché des *timer options* par Société Générale en 2007, la littérature concernant ce type d'option a vraiment pris son envol. Dans cette section, nous présenterons une brève revue de littérature des principaux résultats concernant les *timer options*. Il est important de noter que les chercheurs se sont principalement attardés aux *timer options* perpétuels.

En 2010, Chenxu Li, dans sa thèse de doctorat intitulée « Innovation of Financial Derivatives, Stochastic Models and Their Analytical Implementation », propose une variété de nouveaux résultats au niveau de la tarification et de la gestion des risques des *timer options* perpétuel. L'auteur utilise le célèbre modèle de Heston afin de décrire la dynamique de l'actif sous-jacent et de la variance de l'actif sous-jacent.

Au niveau de la tarification, Li (2010) propose plusieurs méthodes de valorisation d'un *timer option* perpétuel. En premier lieu, il obtient et résout numériquement l'équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite par tout *timer option* perpétuel afin d'obtenir le prix de l'option. En second lieu, il propose une formule fermée de type Black & Scholes exprimant la valeur de l'option. En troisième lieu, il met en œuvre deux méthodes de simulation Monte Carlo afin non seulement de tarifier l'option mais de s'assurer de la validité des résultats obtenus par les deux premières méthodes de tarification. En plus des méthodes de valorisation, Li propose une parité put-call liée aux *timer options* perpétuels.

En ce qui a trait à la gestion des risques d'un *timer option* perpétuel, Li (2010) propose un algorithme afin de calculer les principaux *greeks* à partir d'une simulation Monte Carlo. Il présente des résultats surprenants au niveau des sensibilités de l'option. En effet, ces résultats montrent que le véga d'un *timer option* perpétuel est constamment négatif.

Bernard et Cui (2011) présentent de nouveaux résultats ainsi que des extensions aux travaux de Li (2010). Dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique général, les auteurs expriment le prix du *timer call* perpétuel comme l'espérance d'une formule analytique de type Black & Scholes. La formule fermée est explicitée dans le cadre du Heston et du modèle de Hull-White. À partir de ce résultat, les auteurs proposent une technique de simulation Monte Carlo afin de calculer l'espérance de la formule analytique. Ce faisant, ils proposent une méthode efficace afin de valoriser un *timer option* perpétuel.

En plus d'enrichir la littérature au niveau de la tarification, les auteurs proposent une analyse de sensibilité du prix de l'option perpétuel par rapport à la taille des incréments de temps utilisés dans la simulation, au niveau des taux d'intérêt et par rapport au budget de variance initiale de l'option. À ce sujet, les auteurs concluent que le prix de l'option est une fonction croissante du taux d'intérêt et du budget de variance initiale.

Liang, Lemmens et Tempere (2011) s'attaquent à la tarification de *timer call* perpétuel ainsi qu'à la tarification du cas à horizon maximal à partir de méthodes utilisées en physique quantique. Les auteurs obtiennent une formule fermée de type Black & Scholes pour le prix d'un *timer option* perpétuel.

Par la suite, les auteurs s'attardent au cas avec un horizon maximal. Afin de valoriser ce nouveau cas, les trois chercheurs explicitent la différence entre le cas perpétuel et le cas avec un horizon fini, à savoir que le *payoff* de l'option avec un horizon fini peut être séparé en deux cas distincts : le cas où la variance réalisée atteint le budget de variance avant l'horizon maximal et le cas où la variance réalisée est en dessous du budget de variance à l'horizon maximal de l'option. À partir de cette constatation, et en utilisant la même technique que pour le cas perpétuel, les auteurs parviennent à obtenir une formule fermée dans le cadre d'un modèle de volatilité stochastique général. De plus, ils proposent une formule fermée lorsque la variance est modélisée par le modèle 3/2 et par le modèle de Heston.

3 Description du modèle

Le modèle décrivant les différentes variables stochastiques (taux de change, taux d'intérêt et volatilité) que nous proposons afin de tarifier les *timer options à horizon fini* est tiré intégralement de l'article de Lech Grzelak et Kees Oosterlee « On cross-currency model with stochastic volatility and correlated interest rates ». Conséquemment, nous utiliserons beaucoup de leur notation dans le présent document.

Nous assumons que le taux de change $C(t)$, la variance du taux de change $\sigma(t)$ ainsi que les taux courts domestique $r_d(t)$ et étranger $r_f(t)$ sont décrits, sous la mesure risque neutre domestique, par le système d'équations différentielles stochastique suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{C(t)} &= (r_d(t) - r_f(t)) dt + \sqrt{\sigma(t)} dW^1(t), C(0) > 0 \\ d\sigma(t) &= \kappa(\bar{\sigma} - \sigma(t))dt + \gamma\sqrt{\sigma(t)}dW^2(t), \sigma(0) > 0 \\ dr_d(t) &= \lambda_d(\theta_d(t) - r_d(t))dt + \eta_d dW^3(t), r_d(0) > 0 \\ dr_f(t) &= \lambda_f(\theta_f(t) - r_f(t) - \eta_f \rho_{C,f} \sqrt{\sigma(t)}) dt + \eta_f dW^4(t), r_f(0) > 0 \end{aligned}$$

κ , λ_d et λ_f représentent respectivement les paramètres de vitesse de retour à la moyenne du processus de volatilité, du processus de taux domestique et étranger. γ , η_d et η_f , quant à eux, représentent les paramètres de volatilité instantanée du processus de volatilité, du processus de taux court domestique et étranger respectivement. Finalement, $\bar{\sigma}$ représente la volatilité à long terme du processus de volatilité et $\theta_d(t)$ et $\theta_f(t)$ sont des paramètres choisis de sorte que les processus de taux court domestique et étranger répliquent les structures à terme initiales (domestique et étrangère).

Il est important de mentionner que $W^1(t), W^2(t), W^3(t)$ et $W^4(t)$ sont des mouvements browniens corrélés. L'ajustement à la dérive du processus de taux court étranger $-\eta_f \rho_{C,f} \sqrt{\sigma(t)}$ permet d'assurer que le taux de change forward, défini par : $x(t) = C(t) \frac{M_f(t)}{M_d(t)}$ est une martingale sous la mesure risque neutre domestique ($M_f(t)$ et $M_d(t)$ représente respectivement le compte du marché monétaire étranger et domestique).

Définissons $\mathbf{W}(t) = [W^1(t), W^2(t), W^3(t), W^4(t)]$. Nous pouvons exprimer la structure de corrélation des différents mouvements browniens par la matrice de corrélation suivante :

$$d\mathbf{W}(t) (d\mathbf{W}(t))^T = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{C,\sigma} & \rho_{C,d} & \rho_{C,f} \\ \rho_{C,\sigma} & 1 & 0 & 0 \\ \rho_{C,d} & 0 & 1 & \rho_{f,d} \\ \rho_{C,f} & 0 & \rho_{f,d} & 1 \end{pmatrix} dt$$

Il est important de mentionner que, dans l'article de Grezlak et Oosterlee, tous les éléments de la matrice de corrélation sont non-nuls. Dans notre cas, nous avons supposé, à des fins de simplification, que la corrélation entre la variance et le taux court domestique ainsi que la corrélation entre la variance et le taux court étranger étaient nulles.

De plus, comme il en a été mentionné dans l'introduction de ce document, un *timer option* est entre autres caractérisé par la volatilité implicite que l'acheteur souhaite obtenir ainsi que par l'horizon souhaité de l'option. Ces paramètres sont définis respectivement dans ce document comme étant v_0 et T_0 . Formellement, le budget de variance initiale est défini par $v_0^2 T_0$. Définissons :

$$\tau = \inf \left\{ u > 0, \int_0^u v(s) ds = v_0^2 T_0 \right\}$$

$\int_0^u v(s) ds$ représente l'approximation en temps continu de la variance réalisée jusqu'à l'instant u et τ représente le temps de premier passage de la variance réalisé au budget de variance initiale.

Comme il en a été mentionné dans l'introduction, un *timer option à horizon maximal* diffère de son homologue perpétuel par le fait que l'échéance maximale de l'option est plafonnée. L'horizon maximal de l'option est défini par T_{max} .

Afin de tarifier l'option, il est important de remarquer que le *payoff* potentiel de l'option peut être divisé en deux cas distincts. Dans le premier cas, la variance réalisée atteint le budget de variance avant l'horizon maximal de l'option, i.e. $\tau < T_{max}$. Le *payoff* associé à ce scénario est $\max(C(\tau) - K, 0)$, où $C(\tau)$ correspond à la valeur du taux de change à l'instant τ . Dans le second cas la variance réalisée n'a pas atteint le budget de variance avant l'horizon maximal de l'option, i.e. $\tau > T_{max}$. Dans ce cas, le *payoff* de l'option est défini par $\max(C(T_{max}) - K, 0)$. De façon analogue, $C(T_{max})$ correspond à la valeur du taux de change à l'instant T_{max} . Il est important de mentionner que nous avons choisi arbitrairement de traiter le cas d'une option d'achat. Le raisonnement présenté précédemment s'applique de manière analogue pour une option de vente.

Maintenant que nous avons défini clairement les *payoff* potentiels de l'option, nous pouvons définir formellement l'expression mathématique exprimant le prix de l'option. Fidèle à la théorie financière, le prix d'un *timer call* à horizon fini correspond à l'espérance des flux monétaires futurs actualisés de l'option sous une mesure neutre au risque. Conséquemment, le prix du call correspond à :

$$Call = E^Q \left[(C(T_{max}) - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau \geq T_{max}\}} e^{-\int_0^{T_{max}} r_d(s) ds} + (C(\tau) - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau < T_{max}\}} e^{-\int_0^{\tau} r_d(s) ds} \right]$$

Intuitivement, l'équation ci-haut semble faire intervenir deux composantes connues. En effet, la première partie de la somme représente une option d'achat européenne d'échéance T_{max} . La seconde partie de l'équation représente un *timer call* perpétuel. Ainsi, un *timer call* à horizon fini peut être vue comme la somme pondérée d'une option européenne et d'un *timer option* perpétuel.

Afin de résoudre cette espérance, plusieurs possibilités s'offrent à nous. Nous avons décidé d'utiliser une méthode de simulation Monte Carlo afin de procéder au calcul de l'espérance. La section suivante traitera de la méthodologie employée afin d'effectuer la simulation.

4 Méthodologie de la simulation

Afin de tarifier l'option dans un contexte concret, plusieurs considérations sont importantes. En effet, d'un point de vue pratique, le code informatique effectuant la valorisation ne peut prendre plusieurs heures afin de produire un résultat. À cet égard, la simulation Monte Carlo est reconnue comme une méthode lente et imprécise. Cette section traitera de l'algorithme utilisé afin d'effectuer la simulation et traitera également des techniques utilisées afin d'augmenter l'efficacité de la simulation.

En premier lieu, plusieurs choix s'offrent à nous afin de simuler le système stochastique. Puisqu'un de nos objectifs est de maximiser la précision du résultat de la simulation tout en s'assurant que ce dernier soit produit dans un délai raisonnable, nous avons choisi de simuler notre système à l'aide d'une discrétisation d'Euler.

Plus précisément, voici l'algorithme utilisé afin de simuler les différents processus stochastiques :

$$\begin{aligned}
C(t+1) &= C(t) + (r_d(t) - r_f(t)) * C(t) * \Delta + \sqrt{\sigma(t)} * \sqrt{\Delta} * C(t) * Z_1 \\
\sigma(t+1) &= \text{abs}(\sigma(t) + \kappa * (\bar{\sigma} - \sigma(t)) * \Delta + \gamma * \sqrt{\sigma(t)} * \sqrt{\Delta} * Z_2) \\
r_d(t+1) &= r_d(t) + \lambda_d * (\theta_d(t) - r_d(t)) * \Delta + \eta_d * \sqrt{\Delta} * Z_3 \\
r_f(t+1) &= r_f + \lambda_f * (\theta_f(t) - r_f(t) - \eta_f * \rho_{C,f} * \sqrt{\sigma(t)} * \Delta) + \eta_f * \sqrt{\Delta} * Z_4
\end{aligned}$$

où Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 sont des variables aléatoires normales centrées réduites corrélées. La matrice de corrélation caractérisant leur structure de dépendance est présentée ci-dessous:

$$\begin{pmatrix}
1 & \rho_{C,\sigma} & \rho_{C,d} & \rho_{C,f} \\
\rho_{C,\sigma} & 1 & 0 & 0 \\
\rho_{C,d} & 0 & 1 & \rho_{f,d} \\
\rho_{C,f} & 0 & \rho_{f,d} & 1
\end{pmatrix}$$

Quelques petites précisions concernant l'algorithme utilisé s'imposent. En premier lieu, le processus de variance (processus CIR) peut produire une variance négative si la condition de Feller n'est pas respectée, i.e. $2\kappa\bar{\sigma} > \gamma^2$. En pratique, il est fréquent que le calibrage des différents paramètres fasse en sorte que cette condition ne soit pas respectée. Afin de pallier cet inconvénient, nous avons décidé de considérer la valeur absolue du processus discrétisé dans notre simulation au lieu d'utiliser la simulation « naturelle » du processus. Il est certain que cette méthode produit un biais au niveau de la simulation. Tel que mentionné dans Bernard et Cui (2011), ce type d'approche (transformation du processus discrétisé afin de l'empêcher d'être négatif) est commune en pratique.

De plus, il est connu que la simulation Monte-Carlo brute (sans technique de réduction de variance) s'avère une méthode lente et imprécise. En effet, afin d'obtenir un intervalle de confiance faible (en pourcentage du prix obtenu), il est souvent nécessaire d'effectuer un grand nombre de simulations, ce qui est très coûteux en terme de temps de calcul. Afin de remédier au problème, définissons la variable de contrôle suivante :

$$VC = [x(T_{max})\mathbf{1}_{\{\tau \geq T_{max}\}} + x(\tau)\mathbf{1}_{\{\tau < T_{max}\}}] - C(0)$$

Où VC représente la variable de contrôle, $C(0)$ est la valeur initiale du taux de change et $x(t)$ est le taux forward à l'instant t . L'*output* final de la simulation est donc :

$$Y_C = Y - \beta * VC$$

Où Y est le résultat de la simulation Monte Carlo brute tel que défini plutôt et β est défini comme étant le coefficient de la régression de Y sur VC .

5 Calibrage

Le calibrage du modèle aux différentes données de marché est une étape cruciale dans l'implantation pratique d'un modèle théorique. Dans le modèle que nous proposons, il y a un total de douze paramètres à déterminer. Plus précisément, la matrice de corrélation contient quatre paramètres devant être calibrés, les processus de taux domestique et étranger ont également quatre paramètres nécessitant un calibrage. Les quatre autres paramètres correspondent aux trois paramètres associés au processus de variance en plus de la variance initiale du processus (cette dernière n'est pas directement observable). Compte tenu de la complexité du système, nous avons décidé de calibrer chaque modèle indépendamment. Il est important de mentionner que les approches utilisées afin de calibrer les différents modèles sont tirées de la thèse de maîtrise de Guolong Wang intitulée « An Equity and Foreign Exchange Heston-Hull-White model for Variable Annuities ».

La mise en œuvre pratique du modèle a été faite sur la paire de devises CAD/USD. En premier lieu, afin d'extraire les paramètres de chacun des deux modèles de taux court, nous avons calibré les modèles sur la surface de volatilité *CAP ATM* domestique (Canadienne) et étrangère (Américaine). Plus exactement, nous avons obtenu les volatilités *CAP* pour les échéances 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 10 ans pour le Canada et les États-Unis. Une fois ces volatilités Black obtenues, nous avons calculé le prix en dollar des différents *CAP*. À partir des prix en dollar des *CAP*, nous avons minimisé la somme des différences au carré entre les prix observés sur les marchés et les prix théoriques obtenus à partir de la formule analytique d'un *caplet* dans le modèle de Hull-White.

En second lieu, nous avons calibré les paramètres du processus de variance à partir de la formule analytique (obtenu par transformée de Fourier) d'une option européenne pour le modèle de Heston. Pour plus de détail sur cette formule, on peut se référer à Fang et Oosterlee (2008). Le calibrage est effectué à partir de la surface de volatilité implicite des options de changes CAD/USD côté sur les marchés. Il est important de noter que le résultat du calibrage nous permet d'obtenir, en plus des trois paramètres du processus de variance, la corrélation entre le taux de change et le processus de variance ainsi que la variance de départ. Tout comme pour la calibration des processus de taux d'intérêt, nous avons premièrement utilisé les volatilités observées sur les marchés (10D Put, 25D Put, ATM, 25D Call, 10D Call) afin de calculer les prix en dollar des options. Par la suite, nous avons minimisé la somme des différences au carré entre les prix observés et les prix théoriques donnés par la formule analytique mentionnée précédemment. Nous avons utilisé les options ayant une échéance de 1, 2, 3, 6 et 9 mois ainsi que celles ayant une échéance de 1, 1.5, 2, 3, 4 et 5 ans.

En troisième lieu, nous avons calculé les trois corrélations manquantes à partir des données de marché. La corrélation entre les deux taux d'intérêt et les corrélations entre le taux de changes et les différents taux d'intérêt ont été calculées sur un horizon historique de 1 an. De plus, nous avons considéré le *LIBOR* 3 mois comme une approximation du taux court américain et le *CDOR* 3 mois comme une approximation du taux court canadien.

Finalement, les paramètres manquants (les moyennes à long terme des deux processus de taux d'intérêt pour chaque intervalle de temps de la simulation) ont été obtenus à partir de la formule analytique présente dans la thèse de maîtrise de Wang. Il est important de mentionner que nous avons utilisé la courbe *LIBOR-Swap* comme structure à terme aux États-Unis et nous avons utilisé la courbe *CDOR-Swap* pour la structure à terme canadienne. Nous avons appliqué un ajustement *Basis* à la courbe canadienne afin de nous assurer que les taux que nous utilisons soient en ligne avec les meilleures pratiques de l'industrie.

Le tableau ci-dessous présente les résultats du calibrage au 31 mai 2014 :

Paramètres	Valeurs
κ	0,6043
γ	0,1609
$\bar{\sigma}$	0,011
$\sigma(0)$	0,0063
$\rho_{C,\sigma}$	0,4364
$\rho_{C,d}$	0,3364
$\rho_{C,f}$	0,0491
$\rho_{f,d}$	0,8179
λ_d	0,2663
η_d	0,01
λ_f	0,2595
η_f	0,0152

À la lumière des résultats de la calibration, nous constatons que les valeurs prises par les différents paramètres semblent vraisemblables. En effet, les paramètres de retour à la moyenne des différents processus sont faibles, mais ne prennent pas des valeurs extrêmes (très petite ou très grande). La situation est similaire au niveau des paramètres de volatilité des différents processus. Il est toutefois important de mentionner que la valeur initiale du processus de variance est relativement faible. Malgré cela, la vraisemblance des paramètres obtenus témoigne du succès de l'implantation des différents algorithmes de calibrage.

6 Tarification

À l'aide des paramètres que nous avons obtenus à la section précédente, nous avons procédé à la tarification de *timer options à horizon maximal* sur devise. Ici-bas, nous présentons un tableau comparatif entre un *Call/put* européen et un *Timer call/put à horizon fini* selon différentes spécifications.

Comparaison Option européenne et Timer Option à horizon fini			
Call européen		Put européen	
Strike	1,1113	Strike	0,9937
Échéance	1 an	Échéance souhaitée	1 an
Volatilité Implicite	7,4%	Volatilité implicite	9,2%
Prix (\$)	0,0145	Prix(\$)	0,0112
Timer call à horizon fini		Timer put à horizon fini	
Strike	1,1113	Strike	0,9937
Échéance souhaitée	1 an	Échéance souhaitée	1 an
Volatilité Implicite souhaitée	6,4%	Volatilité implicite souhaitée	8,2%
Échéance maximale	2 ans	Échéance maximale	2 ans
Intervalle de confiance (95%)	0,0001045	Intervalle de confiance (95%)	0,00013971
Prix (\$)	0,0059	Prix(\$)	0,0114
Temps de calcul (secondes)	144,46	Temps de calcul (secondes)	156,37
Timer call à horizon fini		Timer put à horizon fini	
Strike	1,1113	Strike	0,9937
Échéance souhaitée	1 an	Échéance souhaitée	1 an
Volatilité Implicite souhaitée	5,4%	Volatilité implicite souhaitée	7.2%
Échéance maximale	2 ans	Échéance maximale	2 ans
Intervalle de confiance (95%)	0,0000762	Intervalle de confiance (95%)	0,00012177
Prix (\$)	0,0033	Prix(\$)	0,0093
Temps de calcul (secondes)	150,54	Temps de calcul (secondes)	159,47
Timer call à horizon fini		Timer put à horizon fini	
Strike	1,1113	Strike	0,9937
Échéance souhaitée	1 an	Échéance souhaitée	1 an
Volatilité Implicite souhaitée	1000%	Volatilité Implicite souhaitée	1000%
Échéance maximale	1 an	Échéance maximale	1 an
Intervalle de confiance (95%)	0,0002121	Intervalle de confiance (95%)	0,00015927
Prix (\$)	0,0152	Prix(\$)	0,0115
Temps de calcul (secondes)	126,93	Temps de calcul (secondes)	145,89

Si l'investisseur spécifie un budget de volatilité très élevé, dans notre cas 1000%, on s'attend à ce que le prix d'un *timer option* à horizon fini converge vers le prix théorique d'une option européenne portant sur le même sous-jacent dont l'échéance coïncide avec l'échéance maximale du *timer option*. La dernière section du tableau de la page précédente présente ce résultat. Comme nous pouvons le constater, le prix du *timer call* à horizon fini converge vers le prix du call européen. Pour ce qui est du *put*, nous constatons que ce dernier reste relativement stable par rapport au prix obtenu avec une échéance maximale de 2 ans et une volatilité souhaitée de 8.2%. Cette stabilité nous semble plausible puisque le résultat initial était très près du prix observé de l'option européenne. La différence entre les deux prix est expliquée de la même manière que pour le *call*.

7 Analyse de sensibilité du prix de l'option

L'analyse de sensibilité a pour but de mieux comprendre comment évolue le prix d'un *timer option* à horizon fini lorsque certains paramètres clés sont modifiés.

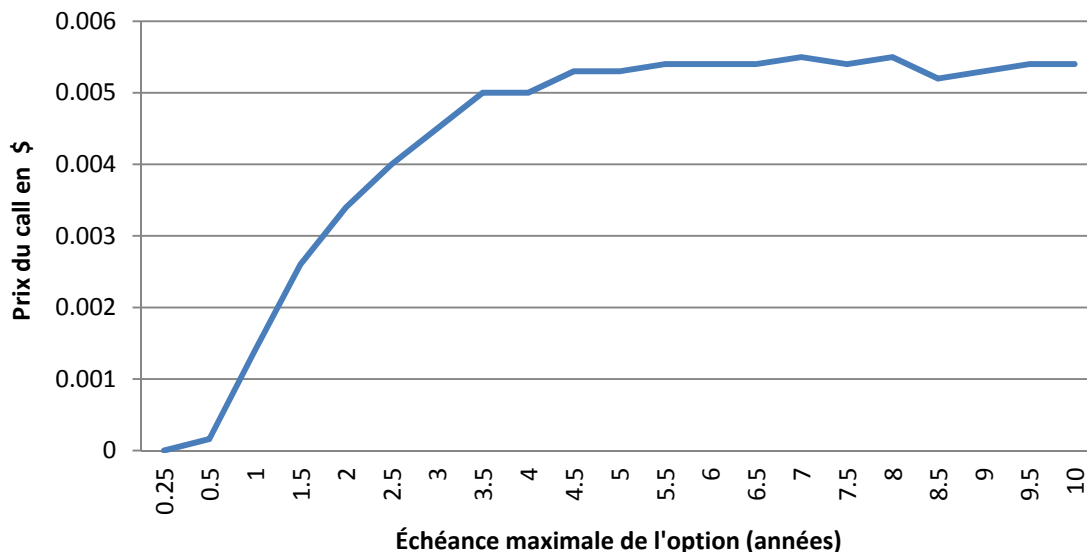
Afin de mieux comprendre le comportement du prix de l'option, nous considérerons deux facteurs : l'échéance maximale de l'option et la volatilité initiale souhaitée par l'investisseur. Nous mettons l'accent sur ces deux facteurs puisqu'ils sont propres au type d'option dont traite ce document. Il est important de mentionner que l'analyse par rapport à la volatilité initiale souhaitée par l'investisseur est implicitement équivalente à une analyse par rapport au budget de variance initiale.

Premièrement, nous allons analyser le comportement du prix de l'option en fonction de l'échéance maximale de cette dernière. Les prix ont été calculés avec 75 000 simulations et 252 pas de temps par simulation. Les paramètres suivants ont également servi aux calculs :

$$\begin{aligned}v_0 &= 0.1 \\T_0 &= 2 \\K &= 1.3001 \\C(0) &= 1.0354\end{aligned}$$

Plus l'échéance maximale augmente, plus le prix du *timer call* à horizon fini converge vers le prix perpétuel.

Prix du Timer call



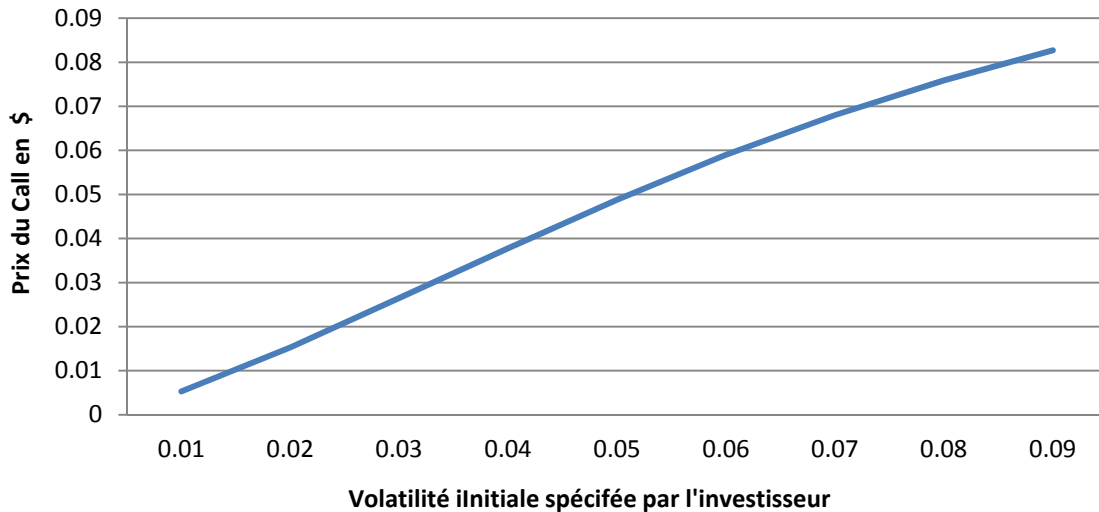
Deuxièmement, nous allons analyser le comportement du prix de l'option en fonction de la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur. Aux fins de calculs, nous avons utilisé les paramètres suivants:

$$\begin{aligned}T_0 &= 5 \\K &= 1.048 \\T_{max} &= 7 \\C(0) &= 1.0354\end{aligned}$$

Tout comme pour l'analyse précédente, les prix ont été obtenus avec 75 000 simulations et 252 pas de temps.

Comme nous pouvons le constater dans le prochain graphique, le prix du *call* est une fonction croissante de la volatilité initiale. Cela semble logique puisque l'avantage d'acheter un *timer call* à horizon fini versus une option européenne provient du fait que si la volatilité réalisée est basse, l'échéance réalisée de l'option sera plus élevée que celle de l'option européenne (pour une prime plus faible). Ainsi, plus le budget de variance initiale est élevé, plus la probabilité est grande que la maturité réalisée de l'option soit plus élevée que l'échéance souhaitée par l'investisseur. Conséquemment, cela se traduit par une hausse dans la prime de l'option. Il est important de noter que cette relation ne serait probablement pas aussi linéaire dans le cas où l'échéance maximale de l'option considérée dans notre exemple numérique aurait été plus faible.

Prix du Timer call



8 Analyse des paramètres grecs de l'option

Dans cette section, nous présentons une analyse de sensibilité du delta et du véga de l'option. Ces paramètres grecs ont été calculés par re-simulation. Plus précisément, nous avons simulé le prix de l'option une première fois. En utilisant les mêmes innovations que dans la simulation initiale, nous avons re-simulé le prix de l'option en appliquant un choc au paramètre dont nous souhaitons estimer la dérivée tout en laissant les autres paramètres intouchés. Une fois ces deux simulations effectuées, la dérivée est estimée par différence finie :

$$Greek = \frac{Call(\theta + \epsilon) - Call(\theta)}{\epsilon}$$

où θ représente le paramètre dont nous souhaitons estimer la dérivée et ϵ représente le choc.

Nous analyserons le comportement des paramètres grecs par rapport à l'échéance maximale de l'option et par rapport à la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur. Dans le premier cas (analyse par rapport à l'échéance maximale), les paramètres suivants ont été utilisés aux fins de calcul :

$$\begin{aligned}v_0 &= 0.1 \\T_0 &= 2 \\K &= 1.3001 \\C(0) &= 1.0354\end{aligned}$$

Dans le second cas (analyse par rapport au budget de variance initiale), les calculs ont été effectués à l'aide des paramètres suivants :

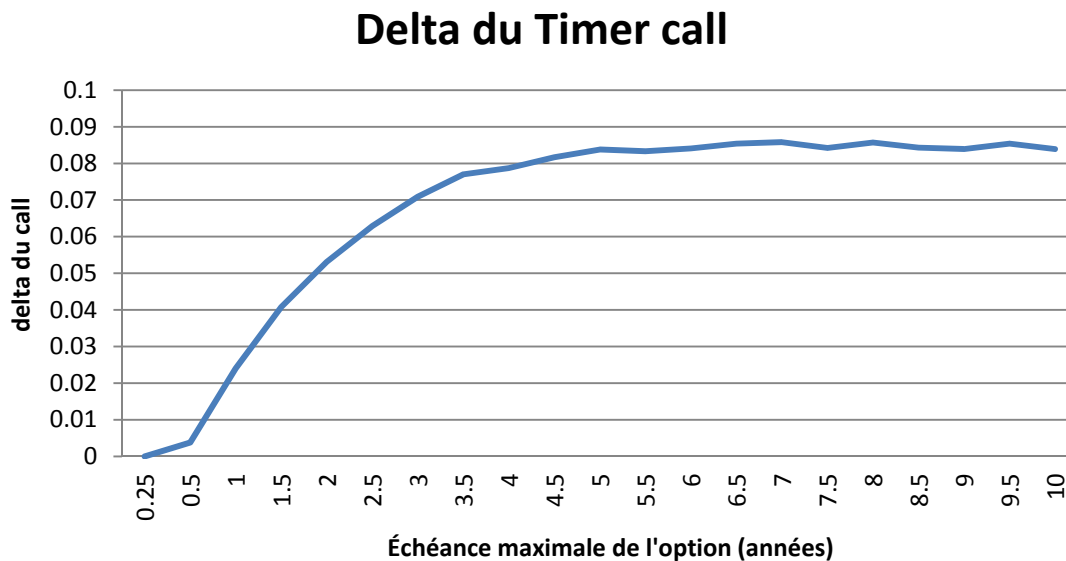
$$\begin{aligned}T_0 &= 5 \\K &= 1.048 \\T_{max} &= 7 \\C(0) &= 1.0354\end{aligned}$$

Dans les deux cas, les calculs ont été effectués avec 75 000 simulations et 252 pas de temps par simulation.

Delta

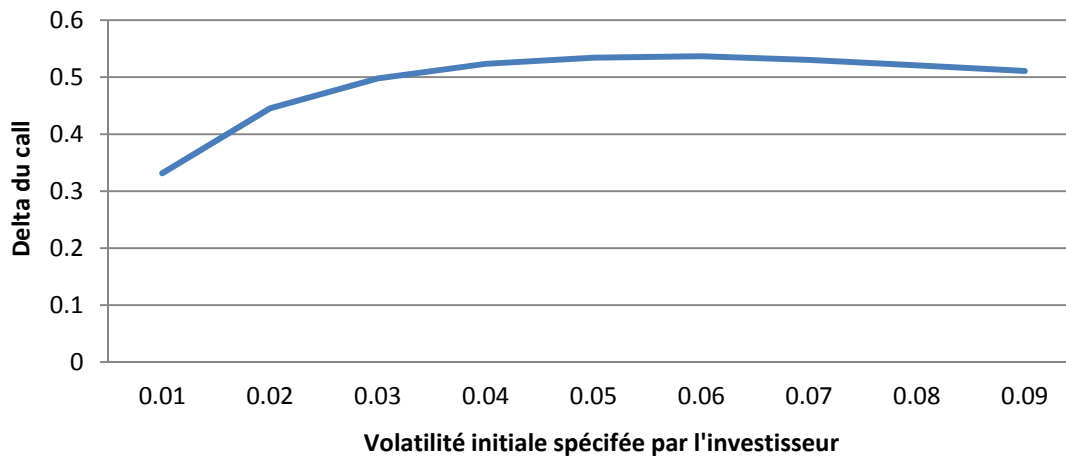
Le delta est défini comme étant la dérivée première de l'option par rapport à l'actif sous-jacent. Dans notre cas, cette valeur représente le changement dans le prix de l'option suite à un changement du taux de change CAD/USD.

En premier lieu, le graphique à la page suivante présente l'évolution du delta en fonction de l'échéance maximale de l'option. Comme nous pouvons le constater, le delta est une fonction croissante de l'échéance maximale lorsque l'échéance maximale est faible par rapport au budget de variance initiale. Le delta devient insensible à la variation de l'échéance maximale lorsque cette dernière est très éloignée par rapport au budget de variance initiale.



Deuxièmement, le graphique suivant exhibe le comportement du delta par rapport à la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur.

Delta du Timer call



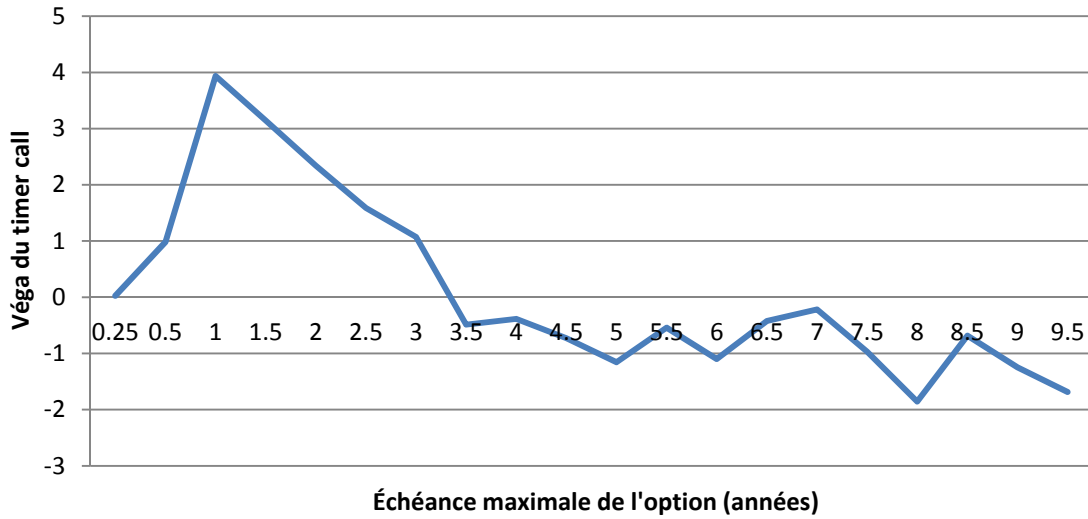
À la vue du graphique ci-haut, nous constatons que le delta du *call* est une fonction croissante de la volatilité initiale jusqu'à environ 0,06. Par la suite, le delta devient une fonction légèrement décroissante. Ce résultat nous semble plausible puisque les différents paramètres utilisés dans les calculs sous-jacents à cette analyse correspondent à ceux d'un *call at the money*, côté à 9,1% de volatilité implicite. Intuitivement, plus le budget de variance initial est élevé par rapport à l'échéance maximale de l'option, plus l'option aura tendance à être exercée avant que le budget de variance ne soit entièrement consommé. Ainsi, son prix convergera vers le prix d'une option européenne. Cette situation se reflète également au niveau du delta de l'option qui tend vers 0,5 (delta d'un *call at the money*).

Véga

Le véga d'une option représente la dérivée du prix de l'option par rapport au paramètre de volatilité. Dans notre contexte, ce dernier s'interprète plutôt comme la variation du prix de l'option par rapport à la variation de la variance initiale du processus de variance.

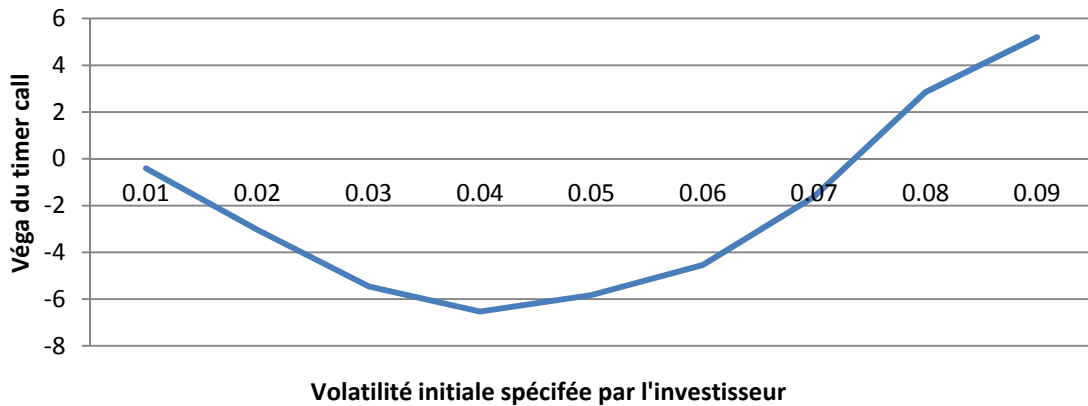
Le graphique du véga de l'option en fonction de la maturité maximale de l'option figure à la page suivante. Ce graphique exhibe une caractéristique surprenante du *timer call* à horizon fini : selon la valeur de l'échéance maximale de l'option, le véga de l'option peut être soit négatif, soit positif. En effet, lorsque l'échéance maximale est éloignée par rapport au budget de variance initial, l'option aura tendance à se comporter comme un *timer call* perpétuel. Tel que démontré dans la thèse de doctorat de Li, ce type d'option est caractérisé par un véga négatif. Toutefois, plus l'échéance maximale est rapprochée par rapport au budget de variance initiale, plus le véga du *timer call* aura tendance à se comporter comme le Véga d'une option européenne classique, i.e. à prendre des valeurs positives. Intuitivement, plus l'échéance maximale de l'option est faible, plus cette dernière aura tendance à être exercée avant que la variance réalisée de l'actif sous-jacent n'atteigne le budget de variance. Ainsi, le comportement de l'option ressemble beaucoup plus à un *call* européen qu'à un *timer call* perpétuel.

Véga du Timer call



Cette caractéristique est également présente lorsque le véga est représenté en fonction de la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur. Cette relation est présentée dans le graphique ci-dessous.

Véga du Timer call



Il est possible que l'échéance maximale de 7 ans utilisée dans les calculs du prix de l'option soit trop faible par rapport au budget de variance initiale. Dans ce cas, si la volatilité demandée est très faible, le budget de variance aura tendance à se consumer avant l'échéance maximale. Le véga de l'option sera donc celui exhibé par un *timer call* perpétuel. Plus la volatilité demandée augmente, plus l'échéance maximale devient contraignante, et plus le véga aura un comportement typique à une option européenne.

9 Conclusion

Dans ce document, nous avons proposé puis mis en œuvre un modèle servant à tarifier les *timer options* à horizon fini sur devise. Nous avons argumenté que le prix d'un *timer option* à horizon fini peut être vue comme la somme pondérée d'une option européenne et d'un *timer option* perpétuel. Par la suite, nous avons proposé une méthode de simulation Monte Carlo afin de calculer le prix d'un *timer option* avec un horizon fini sur taux de change.

Nous avons présenté un tableau comparatif entre le prix des *timer call et put* à horizon fini et le prix de leurs homologues européens. Nous avons constaté que, tel que Société Générale l'avait indiqué, les prix des *timer options* sont plus faibles que ceux des options européennes comparables. Par la suite, nous avons analysé le comportement du prix des options en fonctions de deux composantes : l'horizon maximal de l'option et la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur. Nous avons observé que le prix d'un *timer option* à horizon fini est une fonction croissante de l'échéance maximale jusqu'à un certain niveau. À partir de ce niveau, le prix de l'option devient insensible à l'augmentation de l'échéance maximale. Ainsi, plus l'échéance maximale est lointaine, plus la probabilité que la variance réalisée de l'actif sous-jacent atteigne le budget de variance initiale avant l'échéance est élevée. Donc, plus l'échéance maximale de l'option augmente, plus le prix de l'option avec un horizon fini convergera vers le prix de l'option perpétuelle. C'est la raison pour laquelle nous observons une relation positive entre le prix de l'option et l'échéance maximale de cette dernière. En ce qui a trait à la relation entre le prix de l'option et la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur, nous constatons que le prix de l'option est une fonction croissante du budget de variance. Ce résultat est cohérent avec ceux de Bernard et Cui (2011).

Par la suite, nous avons procédé à l'analyse de sensibilité du delta et du véga de l'option par rapport à l'échéance maximale de cette dernière et par rapport à la volatilité initiale spécifiée par l'investisseur. Nous avons constaté que le véga d'un *timer option* à un horizon peut prendre des valeurs positives ou négatives. Cette caractéristique du Véga de l'option est explicable par le fait qu'un *timer option* à horizon fini peut être vue comme la somme d'une option européenne et d'un *timer option* perpétuel. Ainsi, lorsque l'horizon maximal de l'option est faible, le véga aura tendance à se comporter comme celui d'une option européenne et prendra des valeurs positives. À l'opposé, lorsque l'échéance maximale est lointaine, le véga se comportera comme celui d'un *timer option* perpétuel et prendra des valeurs négatives. De plus, cette caractéristique du véga est également présente lorsque nous observons le comportement de ce dernier en fonction de la volatilité initiale spécifié par l'investisseur.

10 Bibliographie

Bernard C., C. Zhenyu, 2011, Pricing timer options, *Journal of Computational Finance* 15, 69-104.

Bick, A., 1995, Quadratic-variation-based dynamic strategies, *Management Science* 41, 722-732.

Black, F., M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Fang, F., K. Oosterlee, 2008, A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions, Working paper, University Library of Munich, Germany.

Grzelak, L., K. Oosterlee, 2010, On cross-currency model with stochastic volatility and correlated interest rates, *Delft University of Technology Technical Report*, MPRA Paper No. 23020, Disponible en ligne à : <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/23020/>

Heston S., 1993, A closed-form solution with stochastic volatility with application to bond and currency options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

Hull J., A. White, 1987, The pricing of option on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.

Li, C., 2010, Managing volatility risk – Innovation of financial derivatives, stochastic models and their analytical implementation, University of Columbia, Doctoral Thesis.

Liang L. Z. J., D. Lemmens, J. Tempere, 2011, Path integral approach to the pricing of timer options with the Duru-Kleinert time transformation, Working paper, University of Antwerp.

Neuberger, A., 1990. Volatility trading. Working paper. London Business School.

Wang, G., 2011, An equity and foreign exchange Heston-Hull-White model for variable annuities, Delft University of Technology, Master Thesis.