



**Institut canadien des dérivés**  
Canadian Derivatives Institute

L'Institut bénéficie du soutien financier de l'Autorité des marchés financiers ainsi que du ministère des Finances du Québec

## **Note technique**

**NT 19-01**

# **Estimation du modèle structurel de Leland (1994) par méthode itérative et par maximum de vraisemblance**

Mai 2019

Cette note technique a été rédigée par

Pamela Audrey Bouobda, HEC Montréal

## I. INTRODUCTION

Plusieurs modèles ont vu le jour pour pouvoir adéquatement gérer le risque de crédit. Les plus utilisés et documentés sont les modèles structurels et les modèles à formes réduites. Le modèle structurel de crédit est introduit par les travaux de Merton (1974), qui tarifait une dette zéro coupon et inférait les probabilités de défaut. Suite à ces travaux s'ouvre une ère de développement de ce type de modèle dont la principale difficulté réside dans l'estimation adéquate de la valeur des actifs de la firme et de sa volatilité étant donné que ceux-ci ne sont pas observables.

La littérature abonde de méthodes servant à estimer ces paramètres. Le KMV de Moody's et le maximum de vraisemblance développés par Duan (1994) sont celles qui sont le plus souvent rencontrées. Plusieurs études se sont penchées sur les résultats de leurs utilisations dans différents contextes.

Cette étude s'intéresse donc aux résultats de ces méthodes dans le cadre du modèle de Leland (1994), qui est un modèle structurel où les actifs de l'entreprise, comme dans le modèle de Merton (1974) suivent un processus de diffusion. C'est un modèle statique qui incorpore les avantages fiscaux provenant des déductions d'impôts ainsi que les coûts de faillite en cas de défaut pour une meilleure représentation de la réalité.

## II. Le modèle de Leland (1994)

Leland s'appuie entre autres sur les modèles de Merton (1974), de Black et Cox (1976) pour établir son modèle. Il considère que la valeur des actifs de l'entreprise ( $V$ ), suit un processus de diffusion avec volatilité constante tel que l'on ait :

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

Où,

$W_t$  est un mouvement brownien standard,  $\mu$  est le rendement instantané des actifs et  $\sigma$  est la volatilité instantanée constante des actifs.

Il prend le cas d'une créance quelconque qui paie continuellement un coupon  $C$  à des instants dans le temps quand la firme ne fait pas faillite, elle est notée  $D(V)$ . Étant donné l'hypothèse selon laquelle la firme finance le coût net du coupon en émettant de l'équité additionnelle, ce titre peut se définir tel que satisfaisant l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2D_{VV}(V) + rVD_V(V) - rD(V) + C = 0$$

Cette équation différentielle ordinaire admet pour solution générale :

$$D(V) = \frac{C}{r} + A_1V + A_2V^{-X} \quad (2)$$

Où :

$$X = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Les constantes  $A_1$  et  $A_2$  sont déterminées par des conditions aux bornes selon les cas pris en considération. L'équation (2) donne donc la forme générale ainsi que la solution de toute créance indépendante du temps dont le coupon  $C$  est financé par l'émission de l'équité additionnelle.

Leland considère le seuil de défaut  $V_B$  comme étant le niveau de la valeur des actifs où la faillite est déclarée. Le paramètre  $\alpha$ , tel que  $0 < \alpha < 1$ , désigne la fraction de la valeur des actifs qui serait perdue si la faillite est déclarée, laissant les créanciers avec  $(1 - \alpha)V_B$  et les actionnaires avec rien. La dette est donc sous la forme de l'équation (2) et se trouve à partir des conditions aux bornes qui sont les suivantes :

$$\text{À } V = V_B, \quad D(V) = (1 - \alpha)V_B \quad (3)$$

$$\text{lorsque } V \rightarrow \infty, \quad D(V) \rightarrow \frac{C}{r} \quad (4)$$

À l'aide des équations (3) et (4), les paramètres  $A_1$  et  $A_2$  sont trouvés de telle sorte que l'expression de la dette est donnée par :

$$D(V) = \frac{C}{r} + \left[ (1 - \alpha)V_B - \frac{C}{r} \right] * \left[ \frac{V}{V_B} \right]^{-X} \quad (5)$$

L'émission de cette dette affecte l'entreprise de deux façons. D'une part elle réduit la valeur totale de la firme à cause des coûts possibles de faillite ( $\alpha$ ) et d'autre part elle contribue à son augmentation, à cause des déductions d'impôts provenant des paiements d'intérêts du coupon  $C$ . La valeur de ces effets contraires dépend du niveau de la valeur au marché des actifs de la firme et sont eux aussi indépendants du temps. De ce fait, leurs valeurs au marché sont sous la forme de l'équation (2) dérivée plus-haut, et en fonction de leurs conditions aux bornes, ont les expressions suivantes :

Pour la valeur au marché des coûts de faillite ( $BC$ ), on a :

$$\text{À } V = V_B, \quad BC(V) = \alpha V_B \quad (6)$$

$$\text{lorsque } V \rightarrow \infty, \quad BC(V) \rightarrow 0 \quad (7)$$

D'où :

$$BC(V) = \alpha V_B \left( \frac{V}{V_B} \right)^{-X} \quad (8)$$

De même, la valeur au marché des bénéfices fiscaux liés à la dette ( $TB$ ) est donnée par l'expression suivante :

$$\text{À } V = V_B, \quad TB(V) = 0 \quad (9)$$

$$\text{lorsque } V \rightarrow \infty, \quad TB(V) \rightarrow \frac{\rho C}{r} \quad (10)$$

Où  $\rho$ , est le taux de taxe des entreprises.

Il ressort que :

$$TB(V) = \frac{\rho C}{r} - \left( \frac{\rho C}{r} \right) \left( \frac{V}{V_B} \right)^{-X} \quad (11)$$

Ayant les expressions de la valeur au marché des coûts de faillites et de l'avantage fiscal de la dette, la valeur totale de la firme est donnée par :

$$v(V) = V + TB(V) - BC(V)$$

En y insérant les équations (8) et (11) dans l'expression précédente on a :

$$v(V) = V + \left(\frac{\rho C}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x}\right] - \alpha V_B \left(\frac{V}{V_B}\right)^{-x} \quad (12)$$

Il apparaît donc que la valeur totale de la firme est une fonction concave de  $V$  lorsque les paramètres  $C$ ,  $\alpha$  et  $\rho$  sont positifs. Ce qui précède implique que  $v$  est proportionnellement plus volatile que  $V$  lorsque cette dernière est faible et moins volatile que  $V$  quand elle est élevée. L'expression de la valeur de l'équité est donnée par:

$$E(V) = v(V) - D(V)$$

En insérant dans cette expression les équations (5) et (12) on obtient :

$$E(V) = V - (1 - \rho) \frac{C}{r} + \left[ (1 - \rho) \frac{C}{r} - V_B \right] \left[ \frac{V}{V_B} \right]^{-x} \quad (13)$$

Par ailleurs, le seuil de défaut  $V_B$  est endogène et fixé à l'intérieur de la firme par les actionnaires, la dette est non protégée, donc il n'y pas de clauses restrictives attachées à celle-ci et qui protégeraient les créanciers. Dans ce cas, le défaut intervient lorsque l'entreprise ne peut plus payer le coupon par l'émission d'équité additionnelle, c'est-à-dire quand l'équité tombe à zéro. À cette valeur, c'est-à-dire  $E(V) = 0$ , et étant donné la règle de priorité absolue, la valeur des actifs est  $V_B$ . La valeur totale de l'entreprise sera maximisée en choisissant  $V_B$  aussi petite que possible.

Cependant, comme la responsabilité des actionnaires est limitée à leurs apports en capital, la valeur de  $V_B$  ne peut pas être très petite non plus, ce qui fait que  $E(V)$  doit être supérieure à zéro pour toutes valeurs telles que  $V \geq V_B$ . De l'équation (13), il ressort que  $E(V)$  est une fonction convexe de  $V$  lorsque  $V_B < (1 - \rho) \frac{C}{r}$ , donc la valeur de  $V_B$  telle que l'équité est positive pour toutes les valeurs des actifs supérieures au seuil de défaut est telle que

$dE/dV|_{V=V_B} = 0$ . La dérivation de l'équation (13) en fonction de  $V$  avec  $V = V_B$ , et sa résolution par rapport à  $V_B$ , permet d'obtenir la valeur optimale à partir de laquelle la faillite se réalise, elle est donnée par:

$$V_B = \left[ (1 - \rho) \frac{C}{r} \right] \left[ \frac{X}{1 + X} \right] = \frac{(1 - \rho)C}{(r + 0.5\sigma^2)} \quad (14)$$

C'est le niveau d'actif en dessous duquel la faillite est déclarée. Un des résultats importants est que  $V_B$  ne dépend pas du niveau d'actifs de la firme (qui n'est pas observable), ce qui veut dire qu'on peut l'estimer directement à partir du coupon  $C$  et des autres paramètres. Un deuxième résultat découlant de l'équation (14), est que lorsque  $V_B$  est déterminé de façon endogène, l'expression  $(1 - \rho) \frac{C}{r} - V_B$  de l'équation (13) donnant la valeur de l'équité est supérieur à zéro, ce qui veut dire que  $E(V)$  est une fonction convexe de  $V$ . Cela montre que l'équité peut s'écrire comme une option sur la valeur des actifs de l'entreprise, et ceci même si l'horizon de temps est infini comme c'est le cas ici.

Par ailleurs, en considérant le levier optimal de la dette non protégée qui est le taux de coupon qui maximise la valeur totale de la firme étant donné sa valeur courante  $V$ , Leland montre que les firmes aux activités peu ou très risquées vont accepter de payer de façon optimale des coupons élevés. Celles à risque intermédiaires vont relativement versées des coupons plus faibles. De façon logique, le ratio de levier optimal des firmes moins risquées demeure plus élevé que celui des firmes plus risquées.

### III. Les différentes méthodologies utilisées.

#### 1) La méthode de KMV.

Rachetée par Moody's en 2002, c'est une méthode qui permet en deux étapes d'avoir les valeurs des actifs et de la volatilité. En premier lieu, la volatilité est obtenue en suivant la même méthode

que Vassalou et Xing (2004), méthode qui permet de l'estimer par itération à l'aide d'une fenêtre mobile de la façon suivante :

- La valeur initiale de la volatilité des actifs est fixée à l'écart-type des log-rendements de la valeur au marché journalière de l'équité des 12 mois précédant le début de l'évaluation. C'est sa première valeur  $\sigma_{A1}$ .
- Par la suite, cette valeur de  $\sigma_{A1}$  est utilisée pour calculer les valeurs journalières de  $V_A$ .

Pour calculer de  $V_A$ , nous avons procédé par inversion de la fonction des fonds propres. En effet  $V_E = f(V_A, \sigma_A)$  donc  $V_A = f^{-1}(V_E, \sigma_A)$ . Pour calculer  $V_A$ , il suffit de construire une fonction  $g(V_A)$ , tel que :

$$g(V_A) = f(V_A) - V_E \quad (15)$$

Et de rechercher par la suite les zéros de la fonction  $g(V_A)$  :

$$g(V_A) = 0 \text{ implique } f(V_A) = V_E \text{ donc } V_A^* = f^{-1}(V_E) \quad (16)$$

Ce qui nous donne la valeur  $V_A^*$  désirée.

- Une fois les valeurs de  $V_A$  des 12 mois précédents calculées, on calcule les rendements, puis l'écart-type de ces rendements qui sera notre  $\sigma_{A2}$ , c'est-à-dire la valeur de la volatilité pour l'itération suivante.

À l'aide de ce nouveau  $\sigma_{A2}$  nous calculons de nouveau les valeurs de  $V_A$  toujours par inversion de la fonction des fonds propres. À partir de ces valeurs, nous obtenons une nouvelle volatilité  $\sigma_{A3}$  qui sera utilisée pour l'itération suivante. Les itérations sont effectuées chaque fois sur une période de 1 an. La procédure est répétée jusqu'à ce que les valeurs de  $\sigma_A$  de deux itérations consécutives convergent. Notre seuil de convergence étant de  $10^{-4}$ . Le  $\sigma_A$  obtenu à la convergence est alors la valeur de la volatilité de l'année considérée. La fonction des fonds propres étant donnée par la formule (13).

Une fois les valeurs de  $\sigma_A$  en années trouvées, il ne reste plus qu'à prendre cette valeur et à l'utiliser dans la formule donnée par l'équation (16). Nous trouvons ainsi les valeurs de  $V_A$  pour chaque année pour le modèle de Leland (1994).

## 2) La méthode du maximum de vraisemblance.

Elle a été mise au point par Duan (1994), et permet d'obtenir les paramètres non observables de notre modèle que sont la valeur au marché et la volatilité des actifs. Soit  $L(\theta, \text{Données})$ , notre fonction de vraisemblance sous le modèle de Leland (1994), avec  $\theta$ , l'ensemble des paramètres non observables du modèle. La valeur au marché des actifs sous le modèle de Leland (1994) suit un processus de diffusion, donc nous pouvons écrire les formules suivantes concernant sa distribution :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, T\}, \quad V_A(jh) \cong V_A((j-1)h) \exp\left(\mu_A h - \frac{1}{2}\sigma_A^2 h + \sigma_A \sqrt{h} Z\right) \quad (17)$$

Avec  $Z \sim N(0,1)$  et  $h = \frac{1}{252}$

Il s'en suit que :

$$\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)h + \sigma_A \sqrt{h} Z \sim N\left(\left(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)h, \sigma_A^2 h\right)$$

Avec cette information, nous suivons les étapes proposées par Duan (1994), pour écrire la fonction de vraisemblance de la valeur au marché des actifs qui est:

$$L^{VA} = (\mu_A, \sigma_A, V_{A0}, V_{Ah}, \dots, V_{ATh}),$$

Donc :

$$L^{VA} = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma_A^2 h) - \sum_{j=1}^T \ln(V_{Ajh}) - \frac{1}{2\sigma_A^2 h} \left( \sum_{j=1}^T \frac{V_{Ajh}}{V_{A(j-1)h}} - \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)h \right)^2$$



Cependant nous n'observons pas la valeur au marché des actifs de l'entreprise. Néanmoins, étant donné qu'il existe une relation bijective entre la valeur au marché de l'équité et la valeur des actifs de la firme, on peut écrire la fonction de vraisemblance en utilisant la méthode des données transformées. Cela revient à écrire la fonction de vraisemblance de la valeur au marché de l'équité qui elle est constituée de données observables :

$$L^{VE} = ((\mu_A, \sigma_A, V_{E0}, V_{Eh}, \dots, V_{ETh}) .$$

Cette expression est obtenue en utilisant la valeur de  $V_{At}$  qui se réalise comme étant celle obtenue lors de l'inversion de la formule donnant les fonds propres. L'expression suivante est obtenue :

$$L^{VE} = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma_A^2 h) - \sum_{j=1}^T \ln(\widehat{V}_{Ajh}) - \frac{1}{2\sigma_A^2 h} \left( \sum_{j=1}^T \frac{\widehat{V}_{Ajh}}{V_{A(j-1)h}} - \left( \mu_a - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) h \right)^2 - \sum_{j=1}^T \ln \left| \frac{\partial g(\widehat{V}_{Ajh}(\sigma_A, V_A); \sigma_A, V_A)}{\partial \widehat{V}_{Ajh}} \right| \quad (18)$$

Où le dernier terme de l'équation (18), la dérivée de l'équité par rapport à la valeur des actifs est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(V_{At}; \sigma_A, V_B)}{\partial V_{At}} &= \left( V_A - (1 - \rho) \frac{C}{r} + \left[ (1 - \rho) \frac{C}{r} - V_B \right] \left[ \frac{V_A}{V_B} \right]^{-X} \right)' \\ &= 1 - X \left( (1 - \rho) \frac{C}{r} - V_B \right) * \frac{1}{V_B} * \left[ \frac{V_A}{V_B} \right]^{-X} \end{aligned}$$

En remplaçant  $V_B$  par son expression obtenue à l'aide de l'équation (14), il en s'en suit que :

$$\frac{\partial g(V_{At}; \sigma_A, V_B)}{\partial V_{At}} = 1 - \left[ \frac{V_A}{V_B} \right]^{-X} \quad (19)$$

La fonction de vraisemblance de l'équité devient donc :

$$L^{VE} = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma_A^2 h) - \sum_{j=1}^T \ln(\widehat{V}_{Ajh}) - \frac{1}{2\sigma_A^2 h} \left( \sum_{j=1}^T \frac{\widehat{V}_{Ajh}}{V_{A(j-1)h}} - \left( \mu_a - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) h \right)^2 - \sum_{j=1}^T \ln \left( \left| 1 - \left[ \frac{V_A}{V_B} \right]^{-X} \right| \right) \quad (20)$$

En maximisant cette fonction, nous trouvons les estimés recherchés pour le modèle de Leland.

#### IV. Résultats et interprétations

##### a) Les données

Les données utilisées pour aboutir à ces résultats proviennent des entreprises du S&P 500 sur la période de 1997 à 2017. Pour avoir l'échantillon final, nous avons éliminé les firmes du secteur publique, de la santé et des banques, ainsi que celles ayant moins de 10 ans d'observations ou 2 ans et plus de données manquantes. L'échantillon final est donc constitué de 134 entreprises. Pour ce qui est de la dette, nous avons utilisé les données de COMPUSTAT IQ, ainsi que le taux des bons du trésor de maturité 10 ans pour le taux d'intérêt sans risque. La capitalisation boursière quant à elle est obtenue de CRPS en multipliant le prix de l'action par le nombre d'action en circulation pour une entreprise donnée.

##### b) Interprétations des résultats

À l'aide de cet échantillon, nous avons pu faire ressortir plusieurs faits saillants de cette étude. Nous avons calculé les différences relatives entre les valeurs au marché des actifs d'une part et de la volatilité d'autre part provenant des deux modèles. Cet exercice a été mené pour le modèle le modèle de Leland (1994), mais pour le modèle de Merton également. Le but est de contrôler l'exactitude de notre algorithme et de nous assurer que du modèle de Merton à celui de Leland, les seules choses qui changent sont les spécifications des paramètres propres à chacun des modèles, comme par exemple le calcul de la dérivée de la valeur de l'équité par rapport à la valeur des actifs. Ces différences ont les formules suivantes :

$$DiffR_1 = \frac{V_{i,t}^{KMV} - V_{i,t}^{MLE}}{V_{i,t}^{KMV}}$$

$$DiffR_2 = \frac{\sigma_{i,t}^{KMV} - \sigma_{i,t}^{MLE}}{\sigma_{i,t}^{KMV}}$$

Où,  $DiffR_1$  est la différence relative pour la valeur des actifs et  $DiffR_2$  la différence relative pour la volatilité des actifs. Une fois que les différences relatives annuelles pour une entreprise quelconque  $i$  sont calculées, elles sont alors agrégées. Par exemple la différence relative pour la valeur des actifs pour l'année 1997 est obtenue en faisant la moyenne des différences relatives des entreprises constituant l'échantillon en 1997.

Les résultats de ces différences pour le modèle de Merton (1974), confirme ce que dit la littérature. En effet pour ce modèle, les valeurs des actifs et de la volatilité sont égales, qu'elles soient calculées à l'aide de la méthode du KMV ou du maximum de vraisemblance. (Voir annexe 1). Pour le modèle de Leland (1994) par contre l'équivalence ne tient plus, les deux méthodes donnent des valeurs différentes. Pour enrichir notre étude, nous n'avons pas seulement considéré le coupon comme étant la dette de long terme plus un demi de la dette à court terme (CDL) comme dans le modèle de Merton (1974), mais aussi comme pouvant être égale à la dette de long terme plus la dette de court terme (CL) et la dette de long terme (L). Nous voulions ainsi capter l'effet d'une variation de coupon sur les valeurs obtenues par les deux modèles. Les valeurs que donne la spécification CDL sont les plus proches (voir annexe 2), c'est donc cette spécification qui est retenue dans le reste de notre analyse.

Par la suite, nous avons conduit une analyse des tendances annuelles : Cela revient à prendre pour l'année 1997 par exemple les valeurs des actifs de toutes les entreprises de l'échantillon obtenu cette année-là et de faire la moyenne. Nous obtenons ainsi la valeur des actifs pour l'échantillon pour l'année 1997. Nous procédons de la même manière pour la volatilité et ceci pour les 20 ans considérés. Les courbes de tendance obtenues pour la volatilité et la valeur des actifs est donnée par la figure (1) de l'annexe 3. Il ressort clairement cette analyse que la volatilité obtenue à l'aide du KMV semble relativement plus faible que celle obtenues par maximum de

vraisemblance. Par ailleurs, plus la valeur des actifs est élevée, plus la volatilité est faible indépendamment des deux modèles.

Ce dernier fait est observé tout au long de notre analyse mais il faut cependant constater que quand nous étudions les variations des estimés en fonction des secteurs des entreprises, nous avons rencontré comme c'est le cas pour le secteur des services (voir figure (2) annexe 3), des entreprises qui affichent à la fois une forte volatilité et une forte valeur des actifs. Le comportement de la valeur des actifs et de la volatilité peut donc être influencé par la nature de l'entreprise et le niveau de sa dette.

### **c) Analyse des différences entre les deux modèles.**

Nous venons de dégager les faits généraux qui ressortent des résultats que nous avons obtenus. Ces résultats nous donnent aussi des explications sur les différences que nous observons en utilisant la méthode de KMV ou la méthode du maximum de vraisemblance. En effet, Duan Gauthier et Simonato (2004) montrent dans le cadre du modèle de Brockman et Turtle (2003) que si le seuil de défaut exogène considéré est incorrect, les estimations obtenues à l'aide du KMV seront aussi incorrectes. C'est un fait intéressant pour nous car dans le modèle de Leland (1994), le seuil de défaut endogène est donné, fixé à l'intérieur de l'entreprise. Le KMV prend ce seuil et fait des itérations jusqu'à obtenir les estimés de même que le maximum de vraisemblance, sauf que ce dernier optimise pour donner dans les mêmes conditions les valeurs de ces estimés. Donc même si le seuil de défaut n'est pas optimal, les valeurs obtenues par maximum de vraisemblance seront très proches de la vraie valeur contrairement au KMV. Il utilise notamment les informations sur leur distribution. Dans ce contexte et étant donné que les valeurs que nous obtenons pour les deux méthodes sont relativement proches, il en ressort que le KMV a tendance dans le cadre du modèle de Leland (1994) à légèrement sous-estimer la valeur de la volatilité des actifs.

Pour déterminer les autres faits qui pourraient influencer les résultats de ces méthodes, nous avons réalisé plusieurs régressions linéaires. La variable dépendante est à chaque fois le logarithme du rapport soit des valeurs des actifs, soit de la volatilité, la valeur obtenue par KMV se trouvant au numérateur. Ce rapport est régressé sur le taux d'intérêt et le levier de la dette.

Les valeurs de la volatilité et du logarithme de la valeur des actifs du KMV sont également ajoutés aux variables indépendantes pour contrôler pour la taille. À l'aide de variables « dummies », les effets du temps et des industries sont gardés constants. Les résultats de ces régressions en fonction du type de dette sont résumés dans les tableaux (1) et (2) de l'annexe 4.

Dans le cas des régressions du tableau (1), seul le logarithme de la valeur des actifs obtenues par KMV n'est pas significatif ( $\log(V_{kmv})$ ). Les autres variables dépendantes sont significatives au moins à 90%. Le levier de la dette a un effet positif sur le rapport des valeurs des actifs des deux modèles, donc plus il augmente, plus il aura tendance à augmenter les différences d'estimations entre les valeurs des actifs des deux méthodes, toutes choses étant égales par ailleurs. C'est le cas contraire pour le taux d'intérêt qui lui avec son effet négatif sur la variable dépendante va entraîner s'il augmente, une différence d'estimation entre les deux modèles plus faible. Nous constatons également que les R-carré ajustés pour les 3 régressions sont relativement faibles même s'il s'améliore légèrement si on contrôle à la fois pour les effets du temps et des industries.

Le tableau (2) présente quant à lui les résultats des régressions où la variable dépendante est le logarithme du rapport des valeurs de la volatilité obtenue par KMV et par maximum de vraisemblance. Toutes les variables sont significatives au moins à 90%. Nous observons un effet contraire pour le levier de la dette et le taux d'intérêt. En effet, le levier de la dette aura tendance à contribuer à une différence d'estimation plus faible entre les valeurs des volatilités des deux méthodes. Une augmentation du taux d'intérêt quant à lui va entraîner une hausse de cette différence d'estimation, toutes choses étant égales par ailleurs. Les R-carré ajustés ici aussi restent relativement faibles.

Ces résultats donnent donc quelques indications sur la provenance de ces différences d'estimation entre les méthodes de KMV et de maximum de vraisemblance, pouvant découler du Levier de la dette, du taux d'intérêt, ou encore de la taille de l'entreprise considérée.

## Conclusion

La littérature a démontré que pour le modèle de Merton (1974), les deux méthodes donnent les mêmes estimés pour la valeur des actifs et la volatilité. Le modèle de Leland est un modèle structurel comme le modèle de Merton (1974), avec en plus un seuil de défaut endogène, un horizon de temps infini et prend en compte les effets d'imposition et de faillite. Nous sommes dans les mêmes conditions d'estimation dans le sens où les deux modèles possèdent le même nombre de variables inobservables, la valeur des actifs et leur volatilité.

Les deux méthodes donnent cependant des estimations différentes pour la valeur des actifs et la volatilité lorsque appliquées à Leland (1994). En effet, la volatilité du KMV est légèrement plus faible que celle obtenue par maximum de vraisemblance. Cette dernière méthode n'est pas seulement itérative mais aussi un algorithme d'optimisation donnant plus d'informations sur la nature de la distribution et les propriétés statistiques des variables estimées. Elle est également mieux adaptée lorsque la structure du capital de l'entreprise devient complexe.

L'étude que nous venons de mener est une étude qui considère une seule barrière de défaut endogène et une dette sans séniorité. Des modèles beaucoup plus complexes existent. Il serait intéressant de faire l'analyse sur un autre angle en y incluant par exemple une deuxième barrière qui correspondrait à une dette junior et la première à une dette senior, et de voir les implications sur les estimations de la volatilité par ces deux méthodes.

Annexes.

Annexe 1 : Différence relative modèle de Merton (1974).

Dette CDL		
Année	VA	SIGMA
1997	5,53E-06	0,001688
1998	7,40E-06	0,001203
1999	7,46E-05	0,00043
2000	0,000881	-0,00403
2001	0,000299	-0,0039
2002	0,001516	-0,01007
2003	0,000268	-0,00332
2004	4,64E-05	-0,00061
2005	0,000506	-0,00381
2006	0,00014	-0,00164
2007	1,25E-05	0,001195
2008	0,000515	-0,00323
2009	0,000257	-0,00897
2010	4,70E-05	-0,00072
2011	4,06E-05	0,000757
2012	9,32E-07	0,001794
2013	2,47E-07	0,001803
2014	0,000346	0,000734
2015	2,02E-07	0,001921
2016	0,000693	-0,00261
<b> Moyenne </b>	<b> 2,83E-04 </b>	<b> -1,57E-03 </b>

**Annexe 2 : Différence relative modèle de Leland (1994).**

Année	Dettes CDL		Dettes CL		Dettes L	
	VA	SIGMA	VA	SIGMA	VA	SIGMA
1997	0,000433	-0,00498	0,000824	-0,00733	0,000964	-0,0059
1998	0,001854	-0,019	0,003573	-0,02795	0,002134	-0,0144
1999	0,002402	-0,02138	0,003664	-0,03	0,002061	-0,0185
2000	0,003325	-0,02701	0,004799	-0,03512	0,003153	-0,02254
2001	0,00422	-0,03103	0,005364	-0,03909	0,003146	-0,02496
2002	0,010798	-0,05059	0,013135	-0,06043	0,008391	-0,04091
2003	0,002203	-0,01628	0,004223	-0,02528	0,002311	-0,01434
2004	0,000789	-0,00751	0,000897	-0,00996	0,000341	-0,00523
2005	0,000746	-0,00967	0,001116	-0,01342	0,000299	-0,00583
2006	0,000797	-0,0084	0,001612	-0,01416	0,001378	-0,00967
2007	0,000484	-0,00405	0,000746	-0,00616	0,000347	-0,00254
2008	0,024661	-0,10359	0,035878	-0,13668	0,022535	-0,0923
2009	0,019953	-0,13605	0,028932	-0,17493	0,019102	-0,12381
2010	0,003039	-0,01994	0,004527	-0,02713	0,003022	-0,02011
2011	0,008366	-0,04498	0,01176	-0,05791	0,005744	-0,03426
2012	0,004546	-0,02827	0,005897	-0,03364	0,00382	-0,02502
2013	0,001072	-0,01056	0,001749	-0,01604	0,001108	-0,01137
2014	0,000482	-0,00314	0,000758	-0,00502	0,000413	-0,00221
2015	0,001978	-0,01342	0,003608	-0,02143	0,00241	-0,01548
2016	0,003599	-0,03546	0,007069	-0,05126	0,004283	-0,03679
<b>Moyenne</b>	<b>0,004787</b>	<b>-0,02977</b>	<b>0,007007</b>	<b>-0,03965</b>	<b>0,004348</b>	<b>-0,02631</b>



**Annexe 3.**

**Figure 1 : Tendence annuelle dette CDL.**

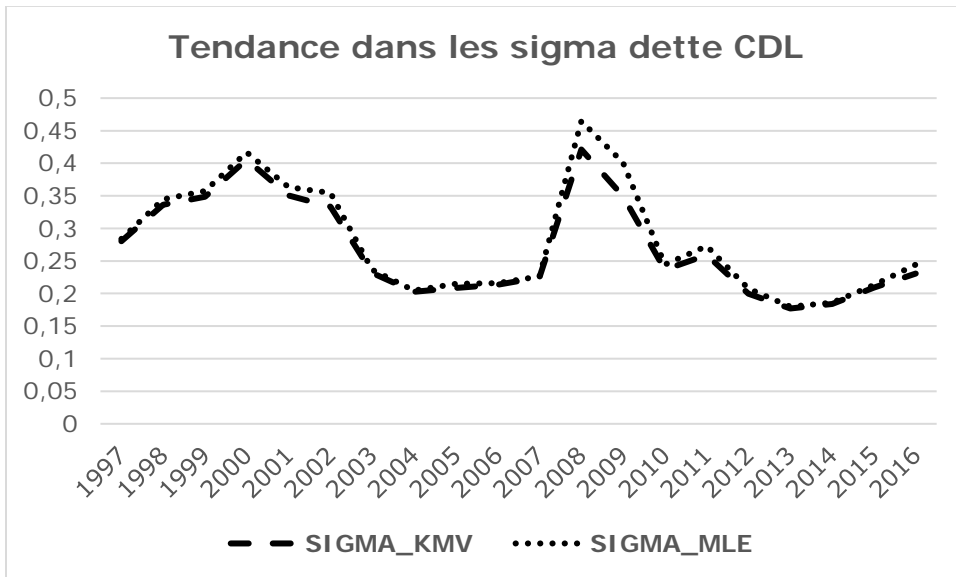
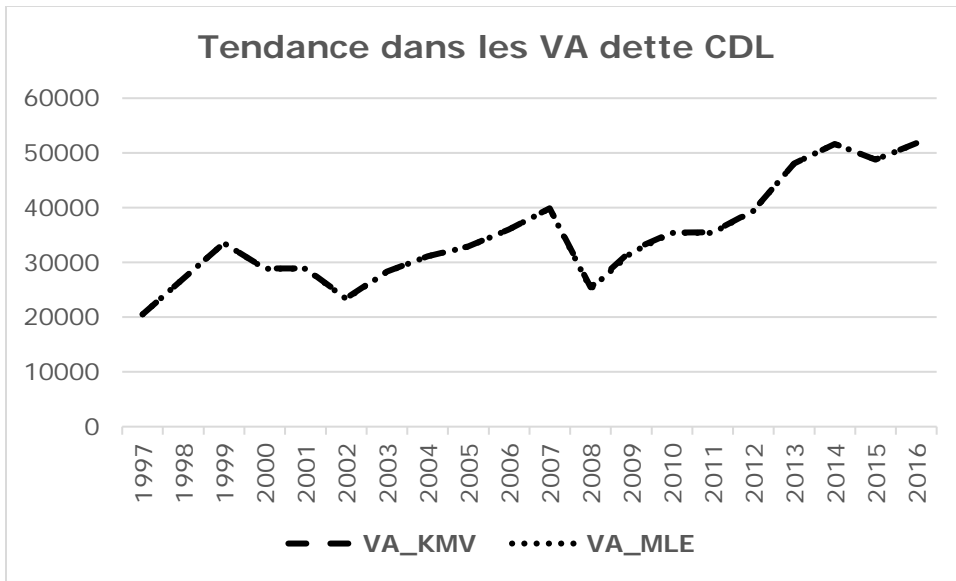
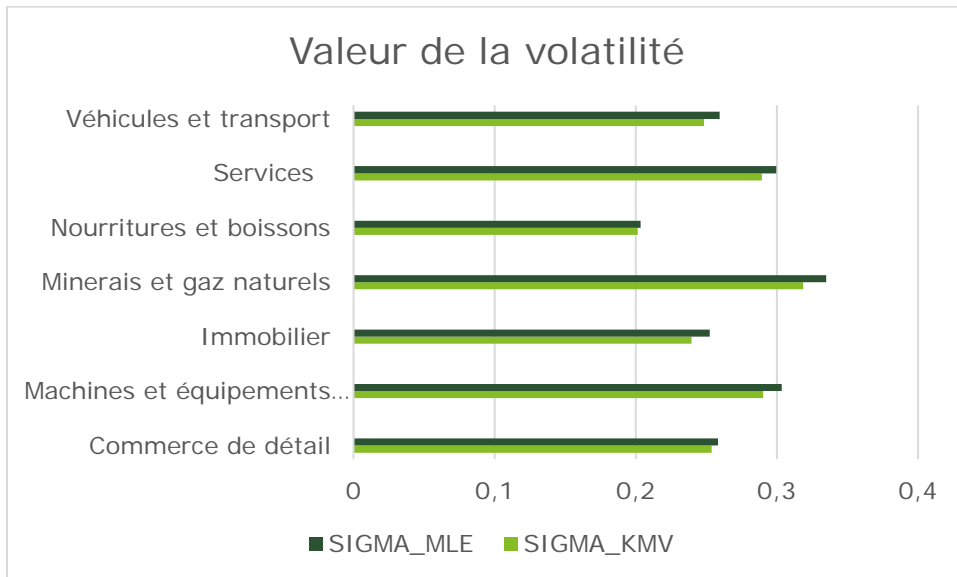
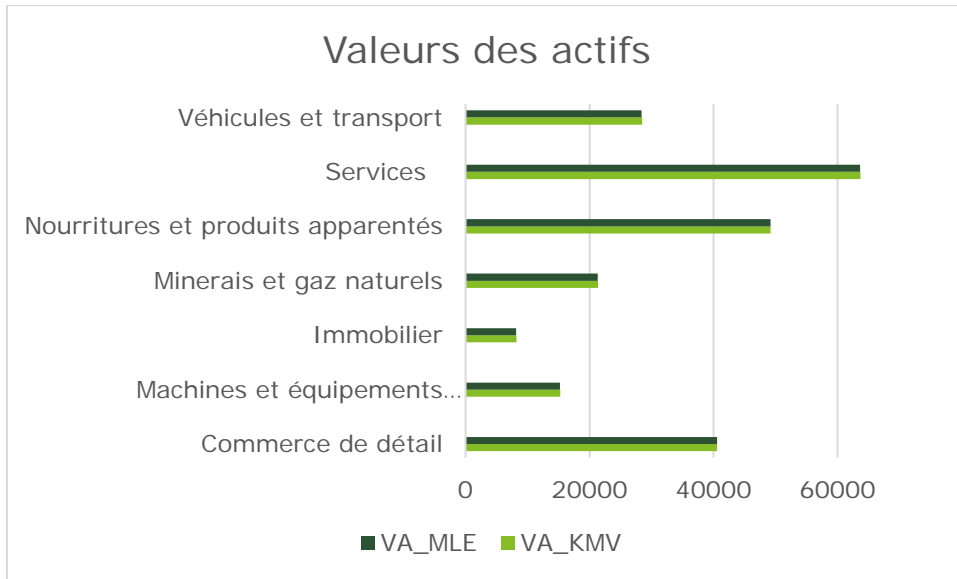


Figure 2 : Analyse sectorielle dette CDL.



Annexe 4 : Résultats des régressions linéaires.

	Sans dummies	Avec dummies (Années)	Avec dummies (Années + industries)
Variables	log (V_kmv/Vmle)	log (V_kmv/Vmle)	log (V_kmv/Vmle)
Constante	-0,0021	0,0073	0,0230
	0,7930	0,4800	0,1630
Taux r	-0,0018***	-0,0043**	-0,0044**
	0,007	0,021	0,022
Levier	0,0227***	0,0230***	0,1775***
	0,000	0,000	0,000
sig_KMV	0,0395***	0,0412***	0,0420***
	0,000	0,000	0,000
log(V_kmv)	-0,0005	-0,0007	-0,0021
	0,4350	0,3430	0,1410
R-carré ajusté	0,0697	0,0698	0,0738
Effets fixes (temps)	Non	oui	oui
Effets fixes (entreprises)	Non	Non	oui

Tableau 1 : Résultats des régressions avec variable dépendante le rapport des valeurs des actifs. \*, \*\*, \*\*\* signifient que le coefficient est statistiquement significatif à un degré de confiance de 90%,95% et 99% respectivement selon leur p-value.

	Sans Dummies	Avec Dummies (Années)	Avec dummies (Années + industries)
Variables	log (sig_kmv/Vmle)	log (sig_kmv/Vmle)	log (sig_kmv/Vmle)
Constante	-0,0300**	-0,0230	-0,0850***
	0,025	0,1830	0,002
Taux r	0,0072***	0,0068**	0,0066**
	0,000	0,029	0,035
Levier	-0,0637***	-0,0632***	-0,0394***
	0,000	0,000	0,000
sig_KMV	-0,1746***	-0,1768***	-0,1704***
	0,000	0,000	0,000
log(V_kmv)	0,0050***	0,0057***	0,0112***
	0,000	0,000	0,000
R-carré ajusté	0,2137	0,2262	0,2095
Effets fixes (temps)	Non	oui	oui
Effets fixes (entreprises)	Non	Non	oui

Tableau 2 : Résultats des régressions avec variable dépendante le rapport des volatilités. \*, \*\*, \*\*\* signifient que le coefficient est statistiquement significatif à un degré de confiance de 90%,95% et 99% respectivement selon leur p-value.

## BIBLIOGRAPHIE

Black F. et M. Scholes, 1973, The pricing of option and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

Black F. et J. Cox, 1976, Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions, *The Journal of Finance*, 31, 351-367.

Bohn F et P. Crosbie, 2003, Modeling default risk, Moody's corporation.

Brockman P. et H. Turtle, 2003, A barrier option framework for corporate security valuation, *The Journal of Financial Economic*, 67, 511-529.

Duan J.C, 1994, Maximum likelihood estimation using price data of the derivative contract, *Mathematical Finance*, 4, 155-167.

Duan J.C. et G. Gauthier et J.G Simonato, 2004, On the equivalence of the KMV and the maximum likelihood methods for structural credit risk model, Document de recherche.

Leland H., 1994, Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure, *Journal of Finance*, 49, 1213-1252.

Merton R.C., 1973, Theory or rational option pricing, *The journal of economics and management science*, 4, 141-470.

Merton R.C., 1974, On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *The Journal of Finance*, 29, 449-470.

Vassalou M. et Y. Xing, 2004, Default risk equity returns, *Journal of Finance*, 59, 831-868.